

GENERALISATION DE LA THEORIE DE PLASTICITE DE W. T. KOITER

J. MANDEL

L'Ecole Polytechnique, Paris

Resumé—On considère un milieu dans lequel la déformation plastique s'effectue par glissements suivant plusieurs familles de plans parallèles, ou plus généralement met en jeu simultanément plusieurs mécanismes. Un tel cas a déjà été envisagé par différents auteurs (Budiansky [1], Sanders [7], Koiter [4]), mais seulement dans l'hypothèse de mécanismes indépendants. Koiter a, dans une synthèse d'une grande élégance [4], étendu la théorie classique de la plasticité au cas où il existe plusieurs mécanismes d'écoulement indépendants. La généralisation que nous envisageons ici concerne le cas de mécanismes d'écoulement non indépendants. Un glissement suivant une première direction, par exemple, influe sur la résistance au glissement suivant une autre direction. Nous établissons d'abord et discutons la forme des relations d'écoulement correspondant à ce cas. Nous montrons ensuite que ces relations plus générales conservent les mêmes propriétés que celles de Koiter, moyennant deux hypothèses complémentaires qui permettent de retrouver tous les théorèmes de la théorie du potentiel plastique.

1. VITESSES DE GLISSEMENT ET VITESSES DE CONTRAINTES

Soit respectivement $\bar{\sigma}$ et \bar{v} les tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation. On remplace ces tenseurs symétriques par des vecteurs d'un espace à six dimensions E_6 en posant :

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3, \quad \sqrt{2} \sigma_{23} = \sigma_4, \quad \sqrt{2} \sigma_{31} = \sigma_5, \quad \sqrt{2} \sigma_{12} = \sigma_6,$$

de telle manière que le produit scalaire $\sigma_{ij} v_{ij}$ de deux tenseurs est remplacé par le produit scalaire $\sigma_i v_i$ des vecteurs correspondants.

On envisage une déformation plastique qui peut résulter de N mécanismes différents, par exemple de glissements suivant N familles de plans parallèles avec éventuellement dilatation perpendiculaire aux plans de glissement et proportionnelle au glissement. Dans le mécanisme de numéro k la déformation est caractérisée par γ_k glissement relatif de deux plans distants de l'unité. Par hypothèse γ_k est non décroissant. Autrement dit deux glissements de sens opposés sont considérés comme deux mécanismes distincts ayant des numéros d'ordre différents. On a donc $\dot{\gamma}_k \geq 0$.

La vitesse de déformation dans le mécanisme k est définie par :

$$v_i^p = \dot{\gamma}_k \alpha_i^{(k)}. \tag{1}$$

Dans le cas d'un glissement de vitesse $\dot{\gamma}$ suivant un plan de normale \mathbf{n} (vecteur unitaire) dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{m} de ce plan, avec dilatation de vitesse $\dot{\epsilon} = \kappa \dot{\gamma}$ suivant \mathbf{n} , on a, avec la notation classique à deux indices :

$$v_{ij} = \dot{\epsilon} n_i n_j + \frac{\dot{\gamma}}{2} (m_i n_j + m_j n_i) = \alpha_{ij} \dot{\gamma}$$

d'où α_{ij} . Pour un glissement pur :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(m_i n_j + m_j n_i).$$

Pour le mécanisme r la condition de glissement est :

$$f_r(\sigma_1, \dots, \sigma_6, \gamma_1, \dots, \gamma_N) = 0. \quad (2)$$

Le domaine élastique actuel est l'intersection des régions $f_r \leq 0$. Si ces régions sont convexes, le domaine élastique est convexe.

Si le mécanisme r est actif à l'instant t et le reste à $t + dt$, on a† :

$$\frac{\partial f_r}{\partial \sigma_j} \dot{\sigma}_j + \frac{\partial f_r}{\partial \gamma_k} \dot{\gamma}_k = 0$$

soit, en posant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_j} &= f_{r,j}, & \frac{\partial f_r}{\partial \gamma_k} &= -H_{rk}, \\ f_{r,j} \dot{\sigma}_j - H_{rk} \dot{\gamma}_k &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Si le mécanisme r est actif à t mais ne le reste pas à $t + dt$, on a :

$$f_{r,j} \dot{\sigma}_j^+ - H_{rk} \dot{\gamma}_k^+ < 0, \quad (4)$$

le signe + indiquant qu'il s'agit des dérivées à droite ($t + 0$). Si au contraire le mécanisme r n'était pas actif à $t - dt$, mais le devient à t :

$$f_{r,j} \dot{\sigma}_j^- - H_{rk} \dot{\gamma}_k^- > 0. \quad (4')$$

Supposons le point de coordonnées σ_i à l'intersection de q faces $f_r = 0$ et considérons une déformation dans laquelle entre (t et $t + dt$) n ($\leq q$) des mécanismes correspondants, numérotés v_1, v_2, \dots, v_n sont actifs. On aura (avec $k = v_1, v_2, \dots, v_n$) :

$$f_{r,j} \dot{\sigma}_j^+ = H_{rk} \dot{\gamma}_k^+ \quad (\text{et } f_r = 0) \quad \text{pour } r = v_1, v_2, \dots, v_n \quad (5)$$

$$f_{r,j} \dot{\sigma}_j^+ < H_{rk} \dot{\gamma}_k^+ \quad \text{et } f_r = 0 \quad \left. \vphantom{f_{r,j} \dot{\sigma}_j^+} \right\} \text{ pour } r \neq v_1, v_2, \dots, v_n \quad (6)$$

$$\text{ou } f_r < 0 \quad (7)$$

Les inégalités (6) seraient renversées si l'on considérait la déformation entre $t - dt$ et t , c'est à dire les dérivées à gauche. En général on envisage l'évolution entre t et $t + dt$, donc les dérivées à droite, et dans la suite, pour alléger l'écriture, nous supprimerons le signe +.

Le nombre des inégalités (6) est $q - n$. Pour $n = q$ on a *charge totale*, pour $n = 0$ *décharge totale*, pour $0 < n < q$ *charge partielle*.

Un choix de n mécanismes actifs parmi les q possibles à partir du point σ_i est ce que nous appellerons un *mode de déformation d'ordre n* . Le nombre des modes de déformation d'ordre n est $C_q^n = q! / n!(q - n)!$. Le nombre total des modes de déformation (y compris la décharge totale) est $1 + C_q^1 + \dots + C_q^q = 2^q$.

Lorsque les glissements obéissent à la loi de Schmid de la plasticité cristalline, le glissement est déterminé uniquement par la cisssion τ sur le plan de glissement dans la

† On utilise dans toute la suite la convention de sommation de l'indice muet.

direction de glissement :

$$\tau = \sigma_{ij} n_j m_i = \sigma_{ij} \alpha_{ij} \quad \text{ou } \sigma_i \alpha_i.$$

Autrement dit :

$$f_r \equiv \tau_r - g_r(\gamma_1, \dots, \gamma_N), \quad (8)$$

et :

$$f_{r,j} = \alpha_j^{(r)}, \quad H_{rk} = \frac{\partial g_r}{\partial \gamma_k}. \quad (9)$$

La relation : (9) $f_{r,j} = \alpha_j^{(r)}$ a lieu plus généralement si l'on admet la *règle de normalité* du vecteur vitesse de déformation plastique : $v_j^p = \alpha_j^{(r)} \dot{\gamma}_r$ (en supposant le mécanisme r seul actif) à la surface limite correspondante $f_r = 0$. En effet la normalité entraîne $f_{r,j} = \lambda \alpha_j^{(r)}$ et l'on peut choisir f_r de manière que $\lambda = 1$. On dit qu'il y a *potentiel plastique* lorsque (9) a lieu. Dans ce cas, si les régions $f_k \leq 0$ sont convexes, on a, σ désignant un état de contrainte à la limite d'écoulement, $\dot{\sigma}$ un autre état situé en deçà de ou sur cette limite :

$$f_{k,i}(\sigma_i - \dot{\sigma}_i) \geq 0$$

d'où, puisque $\dot{\gamma}_k$ est aussi positif :

$$(\sigma_i - \dot{\sigma}_i) v_i^p = f_{k,i}(\sigma_i - \dot{\sigma}_i) \dot{\gamma}_k \geq 0. \quad (10)$$

C'est le *principe du travail maximal*. On a aussi :

$$\dot{\sigma}_j v_j^p = \dot{\sigma}_j f_{r,j} \dot{\gamma}_r = H_{rk} \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r.$$

mais le signe de cette quantité n'est pas fixé sans hypothèse nouvelle. Il y a là une différence notable avec le cas du potentiel plastique simple, dans lequel la notion même d'érouissage exige $\dot{\sigma}_j v_j^p > 0$ (inégalité de Drucker), puisque $\dot{\sigma}$ doit être dirigé vers l'extérieur du domaine élastique.

2. INVERSION DES RELATIONS. RELATIONS D'ÉCOULEMENT

En vue d'obtenir la vitesse de déformation (donnée par (1)) en fonction des vitesses de contraintes $\dot{\sigma}$, nous devons résoudre les équations (5) par rapport aux $\dot{\gamma}_k$ avec les conditions :

$$\dot{\gamma}_k \geq 0, \quad H_{rk} \dot{\gamma}_k > f_{r,j} \dot{\sigma}_j \quad \text{pour } r \neq v_1, \dots, v_m \text{ si } f_r = 0.$$

On montrera plus loin (N° 6) que, si la matrice H_{kr} est symétrique et la forme quadratique associée définie positive, la solution existe, et qu'elle est unique. Mais les hypothèses ainsi faites sont peut-être un peu trop restrictives.

Les restrictions les moins discutables imposées à la matrice H sont celles qui découlent de la notion d'érouissage. Lorsque le point de coordonnées σ_i se dirige vers l'intérieur du domaine élastique actuel, c'est à dire lorsque tous les $f_{r,j} \dot{\sigma}_j$ sont négatifs (lorsque $f_r = 0$), la seule solution possible doit être $\dot{\gamma}_k = 0, \forall k \dagger$ (déformation élastique). En particulier ceci implique $H_{rr} \geq 0$ (la résistance au glissement γ_r augmente avec celui-ci). On verra plus loin (N° 5) que ces restrictions éliminent les cas d'impossibilité de la solution,

† \forall signifie : quel que soit.

mais autorisent l'existence de plusieurs modes de déformation dans lesquels les mécanismes actifs sont différents. L'unicité du mode de déformation n'est pas assurée.

En outre, supposant le mode fixé, c'est à dire les surfaces actives v_1, \dots, v_n déterminées, on va voir que dans certains cas les $\dot{\gamma}_k$ peuvent être indéterminés.

Nous nous limiterons pour l'instant à ce dernier point, c'est à dire à la solution des équations (5) en $\dot{\gamma}_k$, le mode de déformation v_1, \dots, v_n étant supposé fixé.

Dans ces équations la matrice qui intervient est en réalité une sous-matrice principale $H_{kr}^{v_1 \dots v_n}$, constituée par les n lignes et les n colonnes relatives aux glissements actifs, de la matrice complète H_{kr} .

Si cette sous-matrice est inversible, et si $g_{kr}^{v_1 \dots v_n}$ désigne son inverse, la résolution par rapport aux $\dot{\gamma}_k$ donne:

$$\dot{\gamma}_k = g_{kr}^{v_1 \dots v_n} f_{r,j} \dot{\sigma}_j \quad (11)$$

d'où par (1):

$$v_i^p = \alpha_i^k g_{kr}^{v_1 \dots v_n} f_{r,j} \dot{\sigma}_j. \quad (12)$$

Si la sous-matrice est de rang $n-p$ seulement, il doit exister entre les $\dot{\sigma}_i$ p relations de la forme:

$$\lambda_r^{(l)} f_{r,j} \dot{\sigma}_j = 0 \quad (13)$$

qui expriment que le vecteur $\dot{\sigma}$ est contenu dans un sous-espace linéaire à $6-p$ dimensions de l'espace E_6 .[†] La solution des équations (5) dépend alors de p constantes arbitraires μ_l et peut s'écrire:

$$\dot{\gamma}_k = h_{kr} f_{r,j} \dot{\sigma}_j + p_k^{(l)} \mu_l. \quad (14)$$

Le premier terme du second membre est une solution particulière des équations complètes. Les $p_k^{(l)}$ sont p solutions linéairement indépendantes des équations rendues homogènes: $H_{rk} p_k = 0$.[‡] Pour $\dot{\gamma}_k = p_k$, si p_k est positif $\forall k$, d'où $f_{r,j} \dot{\sigma}_j = 0$ par (5) ($r = v_1, \dots, v_n$), on a une déformation plastique sans écrouissage, ou *parfaitement plastique*, le point de coordonnées σ_i restant fixe ou se déplaçant sur l'intersection des n faces actives qui restent fixes. De (14) on déduit:

$$v_i^p = \alpha_i^{(k)} [h_{kr} f_{r,j} \dot{\sigma}_j + p_k^{(l)} \mu_l]. \quad (15)$$

Dans le cas du potentiel plastique: $\alpha_i^{(k)} = f_{k,i}$ la formule contient comme cas particulier la loi du potentiel multiple de Koiter [4] (et bien entendu la loi du potentiel simple, tant pour le corps écrouissable que pour le corps parfaitement plastique).

Dans la conception de Koiter les différents mécanismes sont indépendants. Cela signifie que f_r ne dépend que de γ_r . La matrice H_{kr} est diagonale ainsi que toutes ses sous-matrices principales et par suite aussi les matrices g_{kr} . D'ailleurs les équations (5) se réduisent à:

$$f_{r,j} \dot{\sigma}_j = H_{rr} \dot{\gamma}_r$$

[†] S'il n'en est pas ainsi il faut envisager des modes de déformation avec moins de n mécanismes actifs.

[‡] Si la matrice H est symétrique, on peut prendre $p_k^{(l)} = \lambda_k^{(l)}$, puisque les λ vérifient: $\lambda_k H_{kr} = 0$ ou $H_{rk} \lambda_k = 0$.

avec $H_{rr} \geq 0$. D'où :

$$\dot{\gamma}_k = \begin{cases} g_k f_{k,j} \dot{\sigma}_j \dagger & \text{si } H_{kk} \neq 0 \quad g_k = H_{kk}^{-1} > 0, \\ > 0 \text{ arbitraire} & \text{si } H_{kk} = 0. \end{cases}$$

Alors :

$$v_i^p = \sum_k g_k \alpha_i^{(k)} f_{k,j} \dot{\sigma}_j,$$

le terme d'ordre k étant à remplacer par $\alpha_i^{(k)} \dot{\gamma}_k$ avec $\dot{\gamma}_k > 0$ arbitraire dans le cas où le mécanisme k est sans écrouissage.

L'indépendance des mécanismes paraît difficilement acceptable dans le cas d'un cristal où les dislocations produites par un système de glissement consistent des obstacles pour les autres systèmes.

3. REMARQUES DIVERSES

(a) Puisque la résistance au mécanisme k dépend des déformations suivant les autres mécanismes, la surface $f_k = 0$ ne reste pas fixe, même lorsqu'elle n'est pas active.

(b) Une autre différence avec le cas de Koiter est que l'angle de charge totale et les angles de charge partielle au point σ_i de la surface de charge ne sont pas limités par les prolongements des faces qui se coupent au point σ_i . En effet le mécanisme k cesse d'être actif lorsque $\dot{\gamma}_k$ s'annule. En supposant la sous-matrice $H_{kr}^{v_1 \dots v_n}$ inversible, on obtient la relation :

$$g_{kr}^{v_1 \dots v_n} f_{r,j} \dot{\sigma}_j = 0$$

qui dans l'espace de coordonnées σ_i définit le plan limite \ddagger . Dans le cas de Koiter, la matrice g_{kr} est diagonale et le plan limite (d'équation : $f_{k,j} \dot{\sigma}_j = 0$) est celui de la face correspondant au mécanisme k . Il n'en est pas de même dans le cas général. En particulier l'angle de charge totale n'est pas l'angle opposé à l'angle de la surface de charge au point σ_i . Il peut être plus ouvert ou moins ouvert que ce dernier. Considérons par exemple le cas où $q = 2$. Il y a au maximum deux mécanismes actifs ($r = 1, r = 2$). L'angle de charge totale est limité par deux demi-plans P_1 correspondant à $\dot{\gamma}_1 = 0, \dot{\gamma}_2 > 0$ et P_2 correspondant à $\dot{\gamma}_2 = 0, \dot{\gamma}_1 > 0$. Or, d'après (5), dans P_1 :

$$f_{1,j} \dot{\sigma}_j = H_{12} \dot{\gamma}_2 \quad (\dot{\gamma}_2 > 0)$$

a le signe de H_{12} . Donc suivant que H_{12} est positif ou négatif, l'angle de charge totale est (du côté de P_1) moins ouvert ou plus ouvert que l'angle de la surface de charge.

(c) Une difficulté des relations d'écoulement exprimées par (12) (ou (15)) est que la matrice $g_{kr}^{v_1 \dots v_n}$ dépend des mécanismes actifs \S , de sorte qu'en un point σ_i appartenant

\dagger pas de sommation en k .

\ddagger Lorsque la sous-matrice n'est pas inversible, les plans limites sont remplacés par les plans (13), qui constituent le domaine de variation de $\dot{\sigma}$ lorsque les n mécanismes sont actifs.

\S On aurait pu poser directement des relations d'écoulement de la forme (12). Mais en adoptant la même matrice g , quels que soient les mécanismes actifs, on n'obtenait pas des relations cohérentes. En effet la suppression du mécanisme p devait faire disparaître non seulement les termes $g_{kp} f_{p,j} \dot{\sigma}_j$, mais encore les termes $g_{pk} f_{k,j} \dot{\sigma}_j$ d'où, au moment où le mécanisme p cesse d'être actif, deux conditions :

$$f_{p,j} \dot{\sigma}_j = 0, \quad g_{pk} f_{k,j} \dot{\sigma}_j = 0$$

qui ne coïncident pas, à moins que : $g_{pk} = g_{pp} \delta_{kp}$ (cas de Koiter).

à q faces de la surface de charge, il y a $2^q - 1$ matrices différentes à considérer. Comparons les matrices g relatives à n surfaces actives et à $n - 1$ surfaces actives, la surface de numéro $p = v_n$ disparaissant d'un cas à l'autre, tandis que les $n - 1$ autres surfaces subsistent. Pour simplifier l'écriture, écrivons simplement (n) au lieu de $v_1 \dots v_n$. Nous supposons les matrices $H_{ks}^{(n)}$ et $H_{ks}^{(n-1)}$ inversibles.

Les 2 formes linéaires :

$$X_k \equiv \sum_{v_1}^{v_n} g_{ks}^{(n)} x_s, \quad Y_k \equiv \sum_{v_1}^{v_{n-1}} g_{ks}^{(n-1)} x_s,$$

ont leurs valeurs numériques égales (pour $k \neq p$) lorsque $X_p = 0$, puisque les relations inverses :

$$x_k = \sum_{v_1}^{v_n} H_{ks} X_s = \sum_{v_1}^{v_{n-1}} H_{ks} Y_s$$

entraînent

$$Y_s = X_s (s \neq p) \quad \text{si } X_p = 0.$$

On peut donc poser :

$$X_k = Y_k + \lambda_k X_r$$

d'où :

$$\begin{aligned} g_{ks}^{(n)} &= g_{ks}^{(n-1)} + \lambda_k g_{ps}^{(n)}, \\ g_{kp}^{(n)} &= \lambda_k g_{pp}^{(n)}, \end{aligned}$$

soit, en éliminant λ_k :

$$g_{ks}^{(n-1)} = g_{ks}^{(n)} - \frac{g_{kp}^{(n)} g_{ps}^{(n)}}{g_{pp}^{(n)}}. \quad (16)$$

4. EXEMPLE DE MATRICE H NON INVERSIBLE

Supposons H de la forme :

$$H_{rk} = A_r B_k \quad A_r, \quad B_k > 0.$$

Toutes les sous-matrices de H sont de rang 1. On a donc $p = n - 1$ relations nécessaires (13) entre les $\dot{\sigma}_i$. Effectivement les équations (5) s'écrivent :

$$f_{r,j} \dot{\sigma}_j = A_r \sum_k B_k \dot{\gamma}_k. \quad (17)$$

On voit que les n rapports $f_{r,j} \dot{\sigma}_j / A_r = \varphi_r$ doivent être égaux entre eux et leur valeur commune positive. En supprimant l'indice r pour désigner cette valeur commune, on a alors :

$$\dot{\gamma}_k = \mu_k \frac{f_j \dot{\sigma}_j}{A}, \quad v_i^p = \alpha_i^{(k)} \dot{\gamma}_k \quad (18)$$

les μ_k étant n constantes positives assujetties à l'unique condition :

$$\sum_k B_k \mu_k = 1. \quad (19)$$

Notons que les inégalités (6) donnent les conditions :

$$\frac{f_{r,j}\dot{\sigma}_j}{A_r} < \sum_k B_k \dot{\gamma}_k \quad \text{pour } r \neq v_1, \dots, v_n$$

Donc si q est le nombre des surfaces $f_r = 0$ se croisant au point σ_i ; seules demeurent actives, pour une direction donnée de $\dot{\sigma}$, les surfaces correspondant à la valeur la plus élevée du rapport φ , valeur qui doit en outre être positive (dans le cas où elle est négative, $n = 0$). On voit que, dans l'exemple actuel, le mode de déformation est déterminé d'une manière unique. En revanche, pour un mode d'ordre n , la vitesse de déformation dépend de $n-1$ constantes arbitraires.

Pour fixer les idées, supposons que les mécanismes soient des glissements obéissant à la loi de Schmid. Les surfaces $f_r = 0$ sont alors des plans parallèles à la droite Δ (1, 1, 1, 0, 0, 0) et le nombre de surfaces se croisant au point σ_i est au plus $q = 5$. Avec $q = 5$, pour que l'on ait $n = 5$ (charge totale) il faut que les cinq rapports φ_r correspondant aux surfaces passant par σ_i soient égaux entre eux. Donc $\dot{\sigma}$ doit être dans un sous-espace linéaire à 2 dimensions S_2 contenant la direction Δ . L'angle de charge totale est réduit à zéro.

Pour que l'on ait $n = 4$, il faut que les quatre rapports φ_r les plus élevés soient égaux entre eux. $\dot{\sigma}$ doit être dans l'un ou l'autre de cinq sous-espaces à trois dimensions contenant S_2 et d'un côté déterminé par rapport à S_2 , etc. . . .

Si le rapport φ_r le plus élevé est différent des quatre autres et positif, on a $n = 1$, s'il est négatif, $n = 0$ (décharge totale).

Cas particuliers. On suppose f_r choisi de manière que $H_{r,k}\dot{\gamma}_k$ représente l'augmentation de la résistance au mécanisme r . Dans le cas de glissements obéissant à la loi de Schmid, f_r est défini par (8).

(1) A_r est indépendant de r . Alors l'augmentation de résistance $A_r \sum_k (B_k \dot{\gamma}_k)$ est indépendante du mécanisme envisagé. C'est le cas de l'*écrouissage isotrope*. Dans l'espace des contraintes la surface de charge se transforme en restant homothétique à elle-même.

(2) B_k est indépendant de k . Alors l'augmentation de résistance est $A_r B \sum_k \dot{\gamma}_k$. Donc la résistance ne dépend que de $\Sigma \dot{\gamma}_k$ somme des glissements. C'est l'hypothèse de Taylor [8].

Si le milieu est isotrope et les différents mécanismes identiques à l'orientation près, l'influence de γ_r sur la résistance à γ_k égale l'influence de γ_k sur la résistance à γ_r : la matrice H est alors symétrique ($B_i = A_i$). Dans ces conditions les deux cas particuliers envisagés se confondent et l'on retrouve les relations proposées par Hodge [3] pour l'écrouissage isotrope.

Exemple: Critère de Tresca. Ce critère suppose le corps isotrope. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ désignant les trois contraintes principales, plaçons-nous sur une arête $\sigma_1 = \sigma_2$ du prisme hexagonal représentatif. Il y a alors deux mécanismes d'écoulement possibles, définis par :

$$f_1 \equiv \sigma_1 - \sigma_3 - H(\gamma_1, \gamma_2) = 0,$$

$$f_2 \equiv \sigma_2 - \sigma_3 - H(\gamma_2, \gamma_1) = 0.$$

Les vitesses de déformation plastique principales sont :

$$\begin{aligned}v_1^p &= f_{1,1}\dot{\gamma}_1 + f_{2,1}\dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_1, \\v_2^p &= f_{1,2}\dot{\gamma}_1 + f_{2,2}\dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_2, \\v_3^p &= f_{1,3}\dot{\gamma}_1 + f_{2,3}\dot{\gamma}_2 = -(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2).\end{aligned}$$

Si les 2 mécanismes sont actifs, on a :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_3 &= A\dot{\gamma}_1 + B\dot{\gamma}_2 \quad (\dot{f}_1 = 0), \\ \dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_3 &= B\dot{\gamma}_1 + A\dot{\gamma}_2 \quad (\dot{f}_2 = 0).\end{aligned}$$

Si l'écroutissage est isotrope, le critère reste valable après déformation plastique, donc dans le cas des deux mécanismes actifs: $\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_1$ (le point de charge reste sur l'arête $\sigma_1 = \sigma_2$ —notons que l'angle de charge totale est nul), d'où $B = A$, et en désignant par σ la valeur commune de σ_1 et σ_2 :

$$\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_3 = A(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2)$$

v_3^p est déterminé, mais v_1^p et v_2^p ne le sont pas; seule leur somme égale à $-v_3^p$ est déterminée par les relations d'écoulement.

5. UTILISATION DE VARIABLES GENERALISEES

On simplifie les relations et leur discussion en utilisant des variables généralisées (forces Q_i , déplacements q_i). On suppose qu'on peut choisir les variables q de manière que dans le mécanisme r seul varie q_r et les variables Q de manière que la condition de blocage du mécanisme r ait la forme :

$$f_r \equiv Q_r - H_r(q_1, \dots, q_N) < 0. \quad (20)$$

Dans un mode de déformation d'ordre n on aura :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_r &= H_{rk}\dot{q}_k \quad \text{pour } r = v_1, \dots, v_n, \\ \dot{Q}_r &< H_{rk}\dot{q}_k \quad \text{pour } r \neq v_1, \dots, v_n.\end{aligned}$$

La discussion de l'inversion de ces relations est facile si nous nous limitons à deux mécanismes.

(a) Dans le cas où les deux mécanismes sont actifs (régime 1+2):

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = A\dot{q}_1 + B\dot{q}_2 \\ \dot{Q}_2 = B'\dot{q}_1 + C\dot{q}_2 \end{cases} \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2 > 0 \quad (21)$$

d'où, si

$$AC - BB' \neq 0:$$

$$(AC - BB')\dot{q}_1 = C\dot{Q}_1 - B\dot{Q}_2, \quad (AC - BB')\dot{q}_2 = -B'\dot{Q}_1 + A\dot{Q}_2.$$

Si $AC - BB' = 0$, il faut que l'on ait $B\dot{Q}_2 - C\dot{Q}_1 = 0$ et dans ce cas :

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 \frac{\dot{Q}_1}{A}, \quad \dot{q}_2 = \lambda_2 \frac{\dot{Q}_2}{C},$$

λ_1, λ_2 étant 2 nombres positifs tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

(b) lorsque le mécanisme un est seul actif (régime 1):

$$\dot{Q}_1 = A\dot{q}_1, \quad \dot{Q}_2 < B'\dot{q}_1, \quad \dot{q}_1 > 0, \quad \dot{q}_2 = 0.$$

(c) lorsque le mécanisme deux est seul actif (régime 2):

$$\dot{Q}_1 < B\dot{q}_2, \quad \dot{Q}_2 = C\dot{q}_2, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad \dot{q}_2 > 0.$$

La matrice H doit être telle qu'il n'y ait pas de possibilité de déformation permanente lorsque le point Q_1Q_2 se dirige vers l'intérieur du domaine élastique limité par les droites :

$$Q_1 = H_1(q_1, q_2), \quad Q_2 = H_2(q_1, q_2).$$

L'impossibilité du régime 1 pour $\dot{Q}_1 < 0$ impose $A > 0$.

L'impossibilité du régime 2 pour $\dot{Q}_2 < 0$ impose $C > 0$.

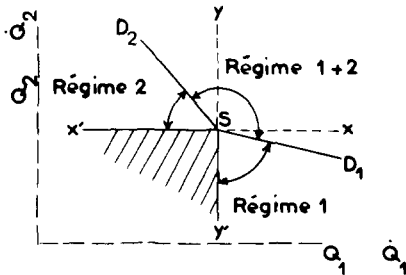


FIG. 1.

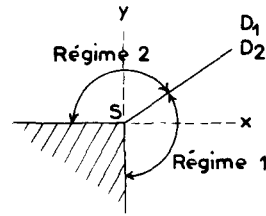


FIG. 2.

Enfin l'impossibilité du régime 1+2 pour \dot{Q}_1 et $\dot{Q}_2 < 0$ impose que, lorsque $BB' \geq AC$, B et B' soient positifs. Comptetenu de ces restrictions, il reste trois cas à distinguer :

(1) $AC - BB' > 0$ (Fig. 1). A partir du sommet S de la frontière élastique où se trouve actuellement le point de charge Q_1Q_2 , portons le vecteur vitesse de ce point $\dot{Q}_1\dot{Q}_2$. Soit D_1 la direction A, B' ($\dot{q}_2 = 0, \dot{q}_1 > 0$), D_2 la direction B, C ($\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 > 0$). La condition $AC - BB' > 0$ montre que l'angle orienté SD_1, SD_2 est compris entre 0 et π . Dans l'angle $Y'SD_1$ (pour la vitesse \dot{Q}) on a le régime 1, dans l'angle $X'SD_2$ le régime 2, dans l'angle D_1SD_2 le régime 1+2.

Dans le régime 1 le point de charge ne reste pas au sommet de la frontière élastique, ce sommet se déplaçant dans la direction SD_1 . De même dans le régime 2, le sommet se déplaçant alors dans la direction SD_2 .

L'angle de charge totale ne coïncide avec l'angle XSY des tangentes à la frontière élastique que lorsque $B = B' = 0$, c'est à dire lorsque les deux mécanismes sont indépendants.

(2) $AC - BB' = 0$ avec B, B' positifs (Fig. 2). Les demies droites D_1 et D_2 sont confondues. L'angle de charge totale est réduit à zéro. Lorsque \dot{Q} est dirigé suivant SD_1 , le vecteur \dot{q} est de direction arbitraire dans l'angle XSY .

(3) $AC - BB' < 0$ avec $B, B' > 0$ (Fig. 3). La demie droite SD_1 passe au dessus de la demie droite SD_2 , de sorte que dans l'angle D_1SD_2 , les 3 régimes sont possibles.

Exemple : Considérons un modèle (Fig. 4) constitué par une tige A de section rectangulaire pouvant subir une translation parallèle à son axe (déplacement x , force F) et une rotation

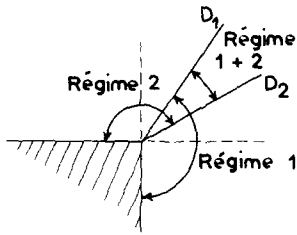


FIG. 3.

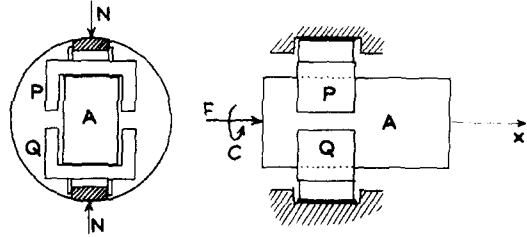


FIG. 4.

autour de cet axe (angle θ , couple C). Cette tige glisse entre deux pièces symétriques P et Q qui tournent dans une gorge circulaire de rayon r et subissent la rotation θ , mais non la translation. En fait la tige A est légèrement conique et la gorge n'est pas exactement circulaire, de telle sorte que la réaction normale qui s'exerce aux points de contact de P et Q avec la gorge est, pour les petits déplacements, de la forme :

$$N = N_0 + ax + b\theta,$$

(on peut supposer le contact établi par des pistons appuyés par des ressorts). Il y a frottement en ces contacts (coefficient f_2) et aussi sur les faces supérieure et inférieure de A (coefficient f_1).

Les deux mécanismes sont ici la translation et la rotation. Les conditions de blocage (20) sont :

$$F - 2f_1N < 0, \quad C - 2f_2Nr < 0,$$

et les équations (21) peuvent s'écrire :

$$\dot{F} = \alpha\dot{x} + \beta\dot{\theta}$$

$$\dot{C} = \frac{f_2r}{f_1}(\alpha\dot{x} + \beta\dot{\theta}).$$

On est donc dans le cas 2 de la discussion. Si $\dot{C} < f_2r/f_1 \dot{F}$ on a translation sans rotation, si $\dot{C} > f_2r/f_1 \dot{F}$ rotation sans translation.

Pour obtenir le cas 1 il suffit d'imaginer qu'à l'extrémité droite de la tige A agit un ressort exerçant une résistance kx ($k > 0$). On a alors :

$$F = (\alpha + k)\dot{x} + \beta\dot{\theta}$$

tandis que l'expression de \dot{C} n'est pas changée, d'où :

$$AC - BB' = \frac{f_2r}{f_1}k\beta > 0.$$

Pour obtenir le cas 3 on peut imaginer qu'à l'extrémité droite de A agit la tension d'un fil pesant de poids ϖ par unité de longueur, qui passe sur une poulie sans frottement et est tendu par un poids. La longueur du brin vertical du fil étant de la forme $C + x$, la tension du brin horizontal est $T_0 + \varpi x$ d'où :

$$\dot{F} = (\alpha - \varpi)\dot{x} + \beta\dot{\theta}.$$

Pour $\varpi > \alpha$ il y aurait instabilité. Mais pour $\varpi < \alpha$ il y a stabilité et l'on se trouve dans le cas 3.

Ce troisième cas, cas de non unicité des modes de déformation, est probablement plus rare que les précédents. Pour l'obtenir on a dû imaginer un système dont l'énergie potentielle n'est pas minimale dans l'état initial (et qui n'est stable que grâce au frottement). Toutefois cette raison ne suffit pas, à notre avis, pour écarter comme impossibles les cas de multiplicité des modes en déformation plastique.

6. HYPOTHESES COMPLEMENTAIRES

Nous ferons maintenant sur la matrice H des hypothèses complémentaires qui entraînent l'unicité et l'existence de la solution en $\dot{\gamma}_k$ des équations (5) et des conditions (6).

(A) Sans supposer nécessairement la matrice H symétrique, supposons que la forme quadratique $H_{kr}x_r x_k$ qui ne dépend que de la partie symétrique de H_{kr} soit définie positive.

L'unicité des $\dot{\gamma}_k$ en fonction des $\dot{\sigma}_i$ en résulte

En effet, posons: $\dot{\gamma}_r f_{r,j} = W_j$.

Dans le cas du potentiel plastique ($f_{r,j} = \alpha_j^{(r)}$), les W_j sont les coordonnées de la vitesse de déformation plastique. Soit, pour un même état de contraintes, deux vitesses de contraintes $\dot{\sigma}^{(1)}$, $\dot{\sigma}^{(2)}$ et $\dot{\gamma}_i^{(1)}$ une solution correspondant à $\dot{\sigma}^{(1)}$, $\dot{\gamma}_i^{(2)}$ une solution correspondant à $\dot{\sigma}^{(2)}$. On a :

$$\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{W}^{(1)} = \dot{\gamma}_r^{(1)} f_{r,j} \dot{\sigma}_j^{(1)} = H_{rk} \dot{\gamma}_r^{(1)} \dot{\gamma}_k^{(1)} \quad \text{d'après (5),}$$

$$\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{W}^{(2)} = \dot{\gamma}_r^{(2)} f_{r,j} \dot{\sigma}_j^{(1)} \leq H_{rk} \dot{\gamma}_r^{(2)} \dot{\gamma}_k^{(1)} \quad \text{d'après (5) et (6)}$$

= ou < suivant que la surface r , active pour $\dot{\gamma}^{(2)}$, l'est aussi ou ne l'est pas pour $\dot{\gamma}^{(1)}$. On en déduit :

$$[\dot{\sigma}^{(1)} - \dot{\sigma}^{(2)}] \cdot [\mathbf{W}^{(1)} - \mathbf{W}^{(2)}] \geq H_{rk} (\dot{\gamma}_r^{(1)} - \dot{\gamma}_r^{(2)}) (\dot{\gamma}_k^{(1)} - \dot{\gamma}_k^{(2)}) > 0. \quad (22)$$

Supposons maintenant $\dot{\sigma}^{(2)} = \dot{\sigma}^{(1)}$. S'il existait deux solutions $\dot{\gamma}^{(1)}$, $\dot{\gamma}^{(2)}$ l'inégalité (22) serait violée (le membre de gauche étant nul). La condition A est donc une condition suffisante d'unicité.

Cette condition n'est d'ailleurs pas nécessaire si la matrice H n'est pas symétrique. En effet dans le cas discuté au N° 5 elle se traduit par les inégalités suivantes :

$$A > 0, \quad C > 0, \quad AC - \left(\frac{B+B'}{2}\right)^2 > 0,$$

$$\text{ou} \quad AC - BB' > \left(\frac{B-B'}{2}\right)^2.$$

Or il résulte de la discussion que les conditions nécessaires et suffisantes d'unicité sont :

$$A > 0, \quad C > 0, \quad AC - BB' > 0.$$

(B) Si l'on suppose en outre la matrice H symétrique, l'existence de la solution $\dot{\gamma}$ peut être démontrée de la façon suivante.

Considérons la fonction des $\dot{\gamma}_i$:

$$\phi = f_{r,j} \dot{\sigma}_j \dot{\gamma}_r - \frac{1}{2} H_{rk} \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_k,$$

et cherchons son maximum pour $\dot{\gamma}_i \geq 0, \forall i$. Ce maximum existe puisque: $H_{rk} \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_k > 0$. Il est atteint soit à l'intérieur, soit à la limite du domaine $\dot{\gamma}_i \geq 0$, autrement dit pour:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_r &> 0 && \text{pour } r = v_1, v_2, \dots, v_n, \\ \dot{\gamma}_r &= 0 && \text{pour } r \neq v_1, v_2, \dots, v_n. \end{aligned}$$

Pour des variations $d\dot{\gamma}_r$ à partir du maximum on a:

$$d\phi = (f_{r,j} \dot{\sigma}_j - H_{rk} \dot{\gamma}_k) d\dot{\gamma}_r$$

$$\text{et } d\phi = 0 \quad \forall d\dot{\gamma}_r \text{ pour } r = v_1, v_2, \dots, v_n$$

tandis que $d\phi < 0$ quand $d\dot{\gamma}_r > 0$ pour $r \neq v_1, v_2, \dots, v_n$. Il en résulte que:

$$\begin{aligned} f_{r,j} \dot{\sigma}_j - H_{rk} \dot{\gamma}_k &= 0 && \text{pour } r = v_1, \dots, v_n, \\ f_{r,j} \dot{\sigma}_j - H_{rk} \dot{\gamma}_k &< 0 && \text{pour } r \neq v_1, \dots, v_n. \end{aligned}$$

Les conditions (5) et (6) sont donc réalisées par les coordonnées $\dot{\gamma}_i$ du maximum.

Notons que les vitesses de déformation plastique se déduisent des $\dot{\gamma}$ par (1), et les vitesses de déformation totales elles-mêmes des vitesses de déformation plastique par:

$$v_i = v_i^p + \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j, \quad (23)$$

Λ_{ij} désignant la matrice des compliances élastiques. L'unicité et l'existence des vitesses de déformation plastique et des vitesses de déformation totales se trouvent donc établies moyennant les hypothèses *A* pour l'unicité, *A* et *B* pour l'existence.

Nous avons laissé de côté jusqu'ici le problème de la détermination des inconnues $\dot{\gamma}_k$ et $\dot{\sigma}_i$ à partir de la donnée de la vitesse de déformation plastique, parce que dans ce problème la généralisation de la théorie de Koiter n'apporte aucune nouveauté. Supposant \mathbf{v}^p donné en un point *M* de la surface de charge où se croisent *q* faces, on doit, pour les *q* mécanismes correspondants, déterminer des valeurs non négatives des $\dot{\gamma}_r$, telles que: $v_i^p = \alpha_i^{(r)} \dot{\gamma}_r$ et qu'à partir de ces $\dot{\gamma}_r$ on puisse calculer des $\dot{\sigma}_i$ satisfaisant aux équations (5) pour les $\dot{\gamma}_r$ positifs, aux inéquations (6) pour les $\dot{\gamma}_r$ nuls. Bornons-nous au cas du potentiel plastique ($\alpha_i^{(r)} = f_{r,i}$). Le problème n'est possible que si la direction de \mathbf{v}^p est contenue dans ou sur la pyramide formée par les normales extérieures aux *q* faces en *M*. Dans l'hypothèse (A) la solution pour $\dot{\gamma}_r$, si elle existe, est unique. En effet l'existence de deux solutions $\dot{\gamma}^{(1)}, \dot{\gamma}^{(2)}$ pour un même \mathbf{v}^p serait en contradiction avec l'inégalité (22) où $\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^{(2)} = \mathbf{v}^p$. La solution pour $\dot{\sigma}$ présente une indétermination d'ordre $6-n$ pour un mode de déformation d'ordre *n*.

7. CONSEQUENCES DES HYPOTHESES COMPLEMENTAIRES DANS LE CAS DU POTENTIEL PLASTIQUE

On va montrer que dans ce cas ($\alpha_i^{(r)} = f_{r,i}$) les hypothèses *A* et *B* permettent de retrouver tous les théorèmes de la théorie classique du potentiel plastique.

Hypothèse A: $H_{rk} x_r x_k \geq 0$.

Il suffit ici de prendre l'inégalité au sens large (égalité permise). Notons que puisque $f_{r,i} = \alpha_i^{(r)}$ l'inégalité *A* implique le postulat de Drucker: $\dot{\sigma}_i v_i^p \geq 0$.

Cependant elle est plus forte que ce postulat, car nous la supposons valable non seulement pour les $\dot{\gamma}_r$ positifs mais quels que soient les signes de $\dot{\gamma}_r, \dot{\gamma}_k$.

L'inégalité (22) (où $\mathbf{W} = \mathbf{v}^p$ et l'égalité est tolérée) devient :

$$[\dot{\sigma}^{(1)} - \dot{\sigma}^{(2)}] \cdot [\mathbf{v}^{p(1)} - \mathbf{v}^{p(2)}] \geq 0. \quad (24)$$

Cette inégalité est vraie aussi pour les vitesses de déformation élastique $\Lambda_{ij}\dot{\sigma}_j$ puisque le potentiel élastique $\Lambda_{ij}\dot{\sigma}_j$ est une forme quadratique positive, et dans ce cas elle est stricte, c'est à dire que l'égalité ne peut avoir lieu que si $\dot{\sigma}^{(1)} = \dot{\sigma}^{(2)}$. Elle est donc vraie et stricte pour les vitesses de déformation totale définies par (23). On l'étend enfin, au moyen du théorème des travaux virtuels, aux contraintes et vitesses de déformation moyennes sur un élément polycristallin, pourvu qu'il n'y ait pas de glissements entre les cristaux dont il est constitué :

$$[\dot{\sigma}^{(1)} - \dot{\sigma}^{(2)}] \cdot [\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}] > 0 \quad \text{si } \dot{\sigma}^{(1)} \neq \dot{\sigma}^{(2)}. \quad (25)$$

De (25) on déduit immédiatement deux propriétés d'unicité :

(a) *Unicité de l'inversion des relations (23) sous la forme :*

$$\dot{\sigma}_i = \mu_{ij} v_j. \quad (26)$$

En effet l'existence de deux solutions $\dot{\sigma}^{(1)} \neq \dot{\sigma}^{(2)}$ pour un même \mathbf{v} , est en contradiction avec (25) où, pour $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}$, le premier membre serait zéro.

(b) *Unicité du champ des vitesses de contraintes* (théorème de Melan), lorsque les vitesses de déplacement sont données sur une partie S_u de la surface d'un corps et les vitesses de traction sur le reste S_T de la surface.

En effet supposons qu'il existe deux champs, $\dot{\sigma}^{(1)}$ associé aux vitesses de déformation $\mathbf{v}^{(1)}$ et $\dot{\sigma}^{(2)}$ associé aux $\mathbf{v}^{(2)}$. Le champ $\dot{\sigma}^{(1)} - \dot{\sigma}^{(2)}$ est un champ statiquement admissible correspondant à des vitesses de traction nulles sur S_T . Le champ de vitesses $\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}$ est un champ cinématiquement admissible correspondant à des vitesses de déplacement nulles sur S_u . L'application du théorème des travaux virtuels à ces deux champs donnerait :

$$\int_V [\dot{\sigma}^{(1)} - \dot{\sigma}^{(2)}] \cdot [\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}] dV = 0$$

en contradiction avec l'inégalité (25) à moins que $\dot{\sigma}^{(1)} = \dot{\sigma}^{(2)}$.

De l'unicité des $\dot{\sigma}$ résulte d'après le N° 6 l'unicité du champ des vitesses de déformation \mathbf{v} si l'inégalité A est stricte. Il n'en est plus ainsi si l'inégalité A n'est pas stricte.

Exemple : $H_{rk} = A_r B_k$. La forme quadratique :

$$H_{rk} x_r x_k = (A_r x_r)(B_k x_k)$$

ne vérifie pas l'inégalité A , à moins que H ne soit symétrique ($B_r = A_r$) et dans ce cas elle la vérifie au sens large, mais non au sens strict.

Par conséquent si H est symétrique, l'unicité de l'expression des $\dot{\sigma}_i$ en fonction des vitesses de déformation et l'unicité du champ des vitesses de contraintes sont vérifiées. Mais l'unicité des vitesses de déformation v_i en fonction des $\dot{\sigma}_i$ et l'unicité du champ des v_i ne sont pas vérifiées, en accord avec les résultats du N° 4 (intervention de $n-1$ constantes arbitraires dans l'expression de v_i^p).

Hypothèse $B + A$: $H_{kr} = H_{rk}$, $H_{kr}x_kx_r \geq 0$.

L'adjonction de l'hypothèse de symétrie de H à l'hypothèse A permet de démontrer les résultats suivants:

(a) *Existence de l'inversion des relations* (23) selon (26). Cherchons pour v_i donné, le maximum de la fonction des $\dot{\sigma}_i$ et des $\dot{\gamma}_k$:

$$\phi = \dot{\sigma}_i v_i - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_i \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j - \frac{1}{2} H_{kr} \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r$$

pour les $\dot{\gamma}_k$ non négatifs et sous les conditions:

$$\begin{aligned} f_{r,j} \dot{\sigma}_j - H_{rk} \dot{\gamma}_k &= 0 & \text{si } \dot{\gamma}_r \neq 0, \\ f_{r,j} \dot{\sigma}_j - H_{rk} \dot{\gamma}_k &< 0 & \text{si } \dot{\gamma}_r = 0. \end{aligned}$$

Ce maximum existe puisque:

$$\dot{\sigma}_i \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j > 0, \quad H_{kr} \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r \geq 0.$$

Pour les variations $d\sigma_i$, $d\gamma_k$ à partir du maximum:

$$d\phi = v_i d\dot{\sigma}_i - \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j d\dot{\sigma}_i - H_{rk} \dot{\gamma}_r d\dot{\gamma}_k.$$

Mais:

$$H_{rk} \dot{\gamma}_r d\dot{\gamma}_k = \dot{\gamma}_r f_{r,j} d\dot{\sigma}_j$$

d'où:

$$d\phi = (v_i - \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j - f_{r,i} \dot{\gamma}_r) d\dot{\sigma}_i.$$

En annulant le coefficient de $d\dot{\sigma}_i$ on obtient les relations (23). Les $\dot{\sigma}_i$ et $\dot{\gamma}_k$ qui maximisent ϕ en sont donc une solution.

(b) *Principes de minimum*. Soit, pour un même état de contraintes, deux vitesses de contraintes $\dot{\sigma}^{(1)}$, $\dot{\sigma}^{(2)}$ auxquelles correspondent les vitesses de déformation plastique $\mathbf{v}^{p(1)}$, $\mathbf{v}^{p(2)}$. Si la matrice H_{kr} est symétrique, $\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{p(2)}$ et $\dot{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{p(1)}$ vérifient la même inégalité

$$\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{p(2)} \quad \text{et} \quad \dot{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{p(1)} \leq H_{kr} \dot{\gamma}_r^{(2)} \dot{\gamma}_k^{(1)}.$$

On peut donc, dans (22) (où $\mathbf{W} = \mathbf{v}^p$), remplacer $\dot{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{p(1)}$ par $\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{p(2)}$, d'où (d'après l'inégalité (A) au sens large):

$$\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{p(1)} + \dot{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{p(2)} - 2\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{p(2)} \geq 0.$$

Cette inégalité est vraie aussi pour les vitesses de déformation élastique. Elle est donc vraie aussi pour les déformations totales. On l'étend enfin, par le théorème des travaux virtuels, aux contraintes et vitesses de déformation moyennes sur un élément polycristallin:

$$\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \dot{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} - 2\dot{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} > 0 \quad \text{si } \dot{\sigma}^{(1)} \neq \dot{\sigma}^{(2)}. \quad (27)$$

Les principes de minimum découlent de (27):

Principe de minimum pour les vitesses de contraintes. Parmi toutes les distributions $\dot{\sigma}_i^*$ statiquement admissibles et compatibles avec les conditions imposées sur S_T , la distribution réelle $\dot{\sigma}_i$ minimise l'expression:

$$A^* = \frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_i^* v_i^* dV - \int_{S_u} \dot{T}_i^* \dot{u}_i dS, \quad (28)$$

\dot{u}_i désignant les composantes des vitesses de déplacement (imposées sur S_u), v_i^* des vitesses de déformation liées aux $\dot{\sigma}_i^*$ par les relations (23) (l'unicité des v_i^* n'est pas nécessaire).

En effet :

$$A^* - A = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_i^* v_i^* - \dot{\sigma}_i v_i) dV - \int_{S_u} (\dot{T}_i^* - \dot{T}_i) \dot{u}_i dS.$$

Mais l'intégrale sur S_u se confond avec l'intégrale sur la surface totale S , puisque \dot{T}_i est donnée sur S_T , et d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\int_S (\dot{T}_i^* - \dot{T}_i) \dot{u}_i dS = \int_V (\dot{\sigma}_i^* - \dot{\sigma}_i) v_i dV$$

d'où

$$A^* - A = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_i^* v_i^* + \dot{\sigma}_i v_i - 2\dot{\sigma}_i^* v_i) dV > 0 \quad \text{si } \dot{\sigma}_i^* \neq \dot{\sigma}_i.$$

Le minimum est absolu et strict, en accord avec le théorème de Melan.

Principe de minimum pour les vitesses de déformation : Parmi toutes les distributions v_i^* cinématiquement admissibles et compatibles avec les conditions imposées sur S_u , la distribution réelle v_i minimise l'expression :

$$B^* = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_i^* v_i^* dV - \int_V \rho \dot{X}_i \dot{u}_i^* dV - \int_{S_T} \dot{T}_i \dot{u}_i^* dS, \quad (29)$$

ρ désigne la masse volumique, \dot{X}_i la vitesse des forces de masse et $\dot{\sigma}_i^*$ est lié à v_i^* par les relations (26).

La démonstration est tout à fait analogue à la précédente. On obtient :

$$B^* - B > 0 \quad \text{si } \dot{\sigma}_i^* \neq \dot{\sigma}_i,$$

donc si $v_i^* \neq v_i$ dans le cas où l'inégalité A est stricte. Dans ce cas le minimum est strict. Dans le cas où l'inégalité A est large, on a un minimum large, en accord avec le fait que le champ v_i peut n'être pas unique.

Comme, d'après le théorème des travaux virtuels, $A + B = 0$, on a l'inégalité répétée :

$$A^* \geq A = -B \geq -B^*. \quad (30)$$

(c) *Stabilité des équilibres.* E étant l'écart par rapport à une position d'équilibre A , cette position est stable si, ε étant arbitrairement petit, on peut trouver η et η' tels que les inégalités : $E_0 < \eta$, $C_0 < \eta'$ entraînent : $E < \varepsilon$, $\forall t > 0$. E_0 désigne l'écart, C_0 l'énergie cinétique, pour $t = 0$. Nous pouvons prendre comme définition de l'écart : $E = \int_V \varepsilon_i \varepsilon_i dV$. ε_i désignant les déformations supposées infiniment petites à partir de la position A et V le volume du corps.

On suppose les déplacements ξ imposés sur une partie S_ξ , les contraintes T imposées sur le reste S_T de la surface S du corps. L'application du théorème de l'énergie cinétique donne, π désignant la puissance des forces s'exerçant sur S et dans V , C l'énergie cinétique :

$$\pi = \int_V \sigma_i \dot{\varepsilon}_i dV + \frac{dC}{dt},$$

Or :

$$\pi = \int_{S_T} T_i \dot{\xi}_i dS + \int_V \rho X_i \dot{\xi}_i dV = \int_V \sigma_i^1 \dot{\varepsilon}_i dV,$$

σ_i^1 désignant les contraintes dans l'état d'équilibre A , d'après le théorème des travaux virtuels appliqué aux contraintes et forces dans cet état et compte-tenu du fait que $\dot{\xi}_i = 0$ sur S_ξ . On en déduit :

$$\int_V (\sigma_i - \sigma_i^1) \dot{\varepsilon}_i dV + \frac{dC}{dt} = 0.$$

Décomposons $\dot{\varepsilon}_i$ en $\dot{\varepsilon}_i^e = \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j$ et $\dot{\varepsilon}_i^p$ et posons :

$$\phi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_i - \sigma_i^1) \Lambda_{ij} (\sigma_j - \sigma_j^1) dV.$$

On a :

$$\int_V (\sigma_i - \sigma_i^1) \dot{\varepsilon}_i^e dV = \frac{d\phi}{dt}$$

et d'après le principe du travail maximal (10)

$$\int_V (\sigma_i - \sigma_i^1) \dot{\varepsilon}_i^p dV \geq 0$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}(\phi + C) \leq 0$$

ou :

$$\phi \leq \phi_0 + C_0 - C \leq \phi_0 + C_0. \quad (31)$$

Pour une valeur donnée de E , différente de zéro, ϕ possède une borne inférieure positive. En admettant que cette borne inférieure soit effectivement atteinte pour une certaine distribution des ε_i correspondant à l'écart E , elle ne peut pas être nulle si la matrice H et toutes ses sous-matrices principales sont inversibles, car, dans ce cas, d'après (11) il est impossible qu'un élément se déforme sous contrainte fixe ; par suite $\sigma_i = \sigma_i^1$ impliquerait $\varepsilon_i = 0$, d'où $E = 0$.

Pour rendre E inférieur à ε , il suffit alors de prendre $E_0 < \varepsilon$ et $\phi < \eta$, η étant le minimum de ϕ pour $E = \varepsilon$. Or la dernière inégalité est réalisée si $C_0 < \eta/2$ et $\phi_0 < \eta/2$.

En résumé le principe du travail maximal et l'inversibilité des sous-matrices principales de H constituent une condition suffisante de stabilité.

Revenant aux hypothèses A et B , celles-ci assurent l'inversibilité des sous-matrices principales de H si l'inégalité A est stricte†. Par conséquent la stabilité est assurée s'il y a un potentiel plastique convexe, si l'inégalité A est stricte et la matrice H symétrique.

(d) *Propriétés des ondes plastiques.* On va montrer au numéro suivant que les hypothèses A et B permettent d'étendre au cas du potentiel multiple les propriétés précédemment établies dans le cas du potentiel simple [5].

8. ONDES PLASTIQUES

(A) Etudions d'abord les propriétés de la matrice μ de (26). En fait cette matrice dépend du mode de déformation, donc possède 2^q déterminations différentes, qu'on

† Dans le cas du potentiel plastique simple ceci exclut le corps parfaitement plastique cf. [6].

peut noter $\mu_{ij}^{y_1 \dots y_n}$, en un point $\dot{\sigma}_i$ où se croisent q faces de la surface de charge (la propriété d'unicité indique que le mode dépend de \mathbf{v} d'une manière univoque).

(1) *La matrice $\mu_{ij}^{y_1 \dots y_n}$ est symétrique.*

En effet, soit $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ deux vitesses de déformation auxquelles correspond le même mode, $\dot{\sigma}^{(1)}$, $\dot{\sigma}^{(2)}$ les vitesses de contraintes qui leur sont associées. On a :

$$\dot{\sigma}_i^{(1)} v_i^{(2)} = \dot{\sigma}_i^{(1)} [f_{k,i} \dot{\gamma}_k^{(2)} + \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j^{(2)}] = H_{kr} \dot{\gamma}_r^{(1)} \dot{\gamma}_k^{(2)} + \dot{\sigma}_i^{(1)} \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j^{(2)}.$$

Donc :

$$\dot{\sigma}_i^{(1)} v_i^{(2)} = \dot{\sigma}_i^{(2)} v_i^{(1)},$$

ou :

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}. \quad (32)$$

(2) *La forme quadratique $\mu_{ij}^{y_1 \dots y_n} v_i v_j$ est non négative*

En effet avec $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)}$ la relation précédente donne :

$$\mu_{ij} v_i v_j = \dot{\sigma}_i v_i = H_{kr} \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_k + \dot{\sigma}_i \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j \geq 0 \quad (33)$$

(l'égalité à zéro est possible si le déterminant de la matrice H est nul, parce que dans ce cas, il existe pour $\dot{\sigma}_i = 0$ des $\dot{\gamma}_r \neq 0$ solutions de (5), et par suite des vitesses $v_i \neq 0$; et pour ces vitesses $\dot{\sigma}_i v_i$ est nul)†.

(3) *La suppression d'un mécanisme d'écoulement augmente la valeur de la forme quadratique. (pour les mêmes v_i)*

Supprimant par exemple le mode v_n on a :

$$\mu_{ij}^{y_1 \dots y_{n-1}} v_i v_j \geq \mu_{ij}^{y_1 \dots y_n} v_i v_j. \quad (34)$$

En effet, pour le même \mathbf{v} , désignons par $\dot{\sigma}^{(n)}$, $\dot{\sigma}^{(n-1)}$ les valeurs correspondantes de $\dot{\sigma}$, par $\dot{\gamma}_k^{(n)}$, $\dot{\gamma}_k^{(n-1)}$ les valeurs de $\dot{\gamma}_k$ dans les modes 1, 2, ... n et 1, 2, ... n-1, respectivement. k et s prenant les valeurs 1, 2, ... n-1, on a, en évaluant v_i dans le mode n :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i^{(n-1)} v_i &= \dot{\sigma}_i^{(n-1)} [f_{k,i} \dot{\gamma}_k^{(n)} + f_{n,i} \dot{\gamma}_n^{(n)}] + \dot{\sigma}_i^{(n-1)} \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j^{(n)} \\ &= H_{ks} \dot{\gamma}_s^{(n-1)} \dot{\gamma}_k^{(n)} + f_{n,i} \dot{\sigma}_i^{(n-1)} \dot{\gamma}_n^{(n)} + \dot{\sigma}_i^{(n-1)} \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j^{(n)}. \end{aligned}$$

Puis, évaluant v_i dans le mode $n-1$:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i^{(n)} v_i &= \dot{\sigma}_i^{(n)} f_{k,i} \dot{\gamma}_k^{(n-1)} + \dot{\sigma}_i^{(n)} \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j^{(n-1)} \\ &= H_{ks} \dot{\gamma}_s^{(n)} \dot{\gamma}_k^{(n-1)} + H_{kn} \dot{\gamma}_n^{(n)} \dot{\gamma}_k^{(n-1)} + \dot{\sigma}_i^{(n)} \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\Delta = \mu_{ij}^{(n-1)} v_i v_j - \mu_{ij}^{(n)} v_i v_j = \dot{\gamma}_n^{(n)} [f_{n,i} \dot{\sigma}_i^{(n-1)} - H_{kn} \dot{\gamma}_k^{(n-1)}].$$

Or les deux facteurs $\dot{\gamma}_n^{(n)}$ et $f_{n,i} \dot{\sigma}_i^{(n-1)} - H_{kn} \dot{\gamma}_k^{(n-1)}$ s'annulent si et seulement si \mathbf{v} est telle que les deux modes coïncident (l'annulation de $\dot{\gamma}_n^{(n)}$ est la condition de coïncidence exprimée au moyen des variables du mode n , l'annulation du crochet est la même condition exprimée au moyen des variables du mode $n-1$). Il en résulte que Δ conserve un

† S'il existe m relations entre les formes linéaires $H_{rk} \dot{\gamma}_k$, il en existe autant entre les formes $\mu_{ij} v_j$.

signe constant. Quand v varie de manière que le mode *réel* soit d'abord le mode $n-1$, puis le mode n , les deux facteurs passent du signe $-$ au signe $+$. Δ est donc toujours positif, d'où (34).

La démonstration de ces trois propriétés est plus aisée lorsque la forme quadratique $H_{r_k x_r x_k}$ est définie (c'est à dire strictement) positive. Toutes les sous-matrices H_{kr} sont alors inversibles de sorte que :

$$v_i = (f_{k,i} g_{kr}^{v_1 \dots v_n} f_{r,j} + \Lambda_{ij}) \dot{\sigma}_j = M_{ij} \dot{\sigma}_j.$$

De la symétrie de g_{kr} et de Λ_{ij} , il résulte que M_{ij} est symétrique. Du caractère défini positif des formes quadratiques associées, il résulte que la forme :

$$M_{ij} \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j = X_k g_{ks}^{v_1 \dots v_n} X_s + \dot{\sigma}_i \Lambda_{ij} \dot{\sigma}_j \quad \text{où } X_k = f_{k,i} \dot{\sigma}_i$$

est définie positive. Alors M_{ij} possède une inverse μ_{ij} symétrique (32) et la forme associée est définie positive (33).

Enfin, en utilisant la relation (16), on obtient :

$$M_{ij}^{(n)} = M_{ij}^{(n-1)} + \frac{1}{g_{pp}^{(n)}} \varphi_i \varphi_j \quad \text{où } \varphi_i = g_{pk}^{(n)} f_{k,i} \quad (35)$$

d'où puisque $g_{pp}^{(n)} > 0$:

$$M_{ij}^{(n)} x_i x_j = M_{ij}^{(n-1)} x_i x_j + \frac{1}{g_{pp}^{(n)}} (\varphi_i x_i)^2 > M_{ij}^{(n-1)} x_i x_j. \quad (36)$$

Pour les formes adjointes $\mu_{ij} v_i v_j$ l'inégalité est renversée†, d'où (34).

On peut d'ailleurs préciser la relation entre $\mu_{ij}^{(n)}$ et $\mu_{ij}^{(n-1)}$ de la manière suivante. La relation :

$$v_i = M_{ij}^{(n)} \dot{\sigma}_j = M_{ij}^{(n-1)} \dot{\sigma}_j + \frac{1}{g_{pp}^{(n)}} \varphi_i (\varphi_j \dot{\sigma}_j) \quad (37)$$

donne :

$$\dot{\sigma}_i = \mu_{ij}^{(n-1)} \left[v_j - \frac{1}{g_{pp}^{(n)}} \varphi_j (\varphi_h \dot{\sigma}_h) \right]$$

d'où :

$$\varphi_h \dot{\sigma}_h \left(1 + \frac{1}{g_{pp}^{(n)}} \mu_{\alpha\beta}^{(n-1)} \varphi_\alpha \varphi_\beta \right) = \mu_{hk}^{(n-1)} \varphi_h v_k.$$

En reportant dans la relation précédente, il vient :

$$\mu_{ij}^{(n)} = \mu_{ij}^{(n-1)} - \frac{\mu_{ip}^{(n-1)} \varphi_p \mu_{hj}^{(n-1)} \varphi_h}{g_{pp}^{(n)} + \mu_{\alpha\beta}^{(n-1)} \varphi_\alpha \varphi_\beta}. \quad (38)$$

(B) Considérons maintenant une *surface de discontinuité du second ordre* ‡ telle que le mode de déformation soit le même de part et d'autre de la surface (ceci a toujours lieu pour une discontinuité $[\dot{\sigma}]$ suffisamment faible du vecteur vitesse de contrainte). D'après (32)

† On peut le démontrer en diagonalisant simultanément les deux matrices $M^{(n)}$ et $M^{(n-1)}$ par une transformation non orthogonale.

‡ Discontinuité des dérivées premières de la vitesse et des contraintes.

et (33) la matrice $\mu_{ij}^{(n)}$ possède les mêmes propriétés que la matrice Λ_{ij} des coefficients d'élasticité. Il en résulte que comme dans le cas de l'élasticité *il existe pour chaque direction de la normale à la surface d'onde trois célérités possibles et les vecteurs [A] (discontinuité de l'accélération) correspondants sont orthogonaux.*

En revenant à la notation classique à deux indices pour les tenseurs σ_{ij} , v_{ij} , la matrice μ s'écrit $\mu_{ij,hk}$. Alors cf. [5] si α_i désigne les cosinus directeurs de la normale à l'onde, Ω sa célérité, ρ la masse volumique, les valeurs de $\rho\Omega^2$ sont les valeurs propres de la matrice symétrique :

$$B_{ik}^{(n)} = \mu_{ij,hk}^{(n)} \alpha_j \alpha_h$$

associée à la forme quadratique non négative :

$$B_{ik}^{(n)} x_i x_k = \mu_{ij,hk}^{(n)} \alpha_j x_i \alpha_h x_k \quad (39)$$

et les vecteurs [A] sont les vecteurs propres correspondants.

Une discontinuité non propre se résout en trois discontinuités propres se propageant avec des célérités différentes (à condition que pour chacune d'elles la discontinuité de la vitesse de déformation ne change pas le mode de déformation).

Comparons maintenant les célérités correspondant au mode de déformation v_1, v_2, \dots, v_n et au mode v_1, v_2, \dots, v_{n-1} . De (34) et (39) résulte :

$$B_{ik}^{(n)} x_i x_k \leq B_{ik}^{(n-1)} x_i x_k$$

ce qui entraîne†, $B_p(p = 1, 2, 3)$ désignant les trois valeurs principales d'une matrice B_{ik} :

$$B_p^{(n)} \leq B_p^{(n-1)}. \quad (40)$$

Si l'on supprime progressivement les mécanismes de déformation, on obtient finalement le mode élastique correspondant aux matrices $\lambda_{ij,hk}$ et $B_{ik}^{(0)}$. On aura :

$$B_p^{v_1 \dots v_n} \leq B_p^{v_1 \dots v_{n-1}} \leq B_p^{v_1 \dots v_{n-2}} \leq B_p^{(0)}. \quad (41)$$

Donc : à mesure que l'on supprime des mécanismes de déformation, les célérités des ondes augmentent et en particulier les célérités des ondes plastiques sont inférieures ou égales à celles des ondes élastiques de même numéro d'ordre.

On peut en outre préciser que *les célérités des ondes $n-1$ et des ondes n se séparent mutuellement, c'est à dire que :*

$$B_3^{v_1 \dots v_n} \leq B_3^{v_1 \dots v_{n-1}} \leq B_2^{v_1 \dots v_n} \leq B_2^{v_1 \dots v_{n-1}} \leq B_1^{v_1 \dots v_n} \leq B_1^{v_1 \dots v_{n-1}}. \quad (42)$$

En effet, d'après (38) en revenant à la notation à deux indices puis formant les matrices B , il vient :

$$B_{ik}^{(n)} = B_{ik}^{(n-1)} - r a_i a_k$$

en posant :

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_{ij,pq} \varphi_{pq} \alpha_j, \\ \frac{1}{r} &= g_{pp}^{(n)} + \mu_{mn,\sigma\tau}^{(n-1)} \varphi_{mn} \varphi_{\sigma\tau}. \end{aligned} \quad (43)$$

† On peut le démontrer en comparant les grands axes, les rayons des sections circulaires et les petits axes des ellipsoïdes associés aux deux matrices.

Prenons comme axes les directions principales de la matrice $B^{(n-1)}$, dont les valeurs principales sont désignées ici par A_1, A_2, A_3 , ($A_1 \geq A_2 \geq A_3$). Les valeurs principales B_1, B_2, B_3 de $B^{(n)}$ sont les racines de l'équation en S :

$$F(S) \equiv |B_{ik} - S\delta_{ik}| = 0$$

soit en développant le déterminant :

$$F(S) \equiv (A_1 - S)(A_2 - S)(A_3 - S) - r[a_1^2(A_2 - S)(A_3 - S) + a_2^2(A_3 - S)(A_1 - S) + a_3^2(A_1 - S)(A_2 - S)] = 0, \quad (44)$$

r étant positif, on a :

$$F(A_1) \leq 0, \quad F(A_2) \geq 0, \quad F(A_3) \leq 0 \quad \text{et} \quad F(-\infty) > 0,$$

d'où les inégalités (42) (qui donnent en particulier une nouvelle démonstration de (40), moins générale cependant que la précédente puisque (38) suppose les sous-matrices principales de H inversibles). Les résultats précédents sont la généralisation des propriétés établies [5] dans le cas du potentiel plastique simple.

(C) Soit maintenant une *surface de discontinuité telle qu'un des mécanismes de déformation disparaisse à son passage*, le mode étant $v_1 \dots v_n$ devant la surface, $v_1 \dots v_{n-1}$ derrière. Nous limitant au cas où l'inégalité A est stricte, donc les sous-matrices de H inversibles, nous aurons :
derrière la surface :

$$v_i^{(2)} = \Lambda_{ij}\dot{\sigma}_j^{(2)} + g_{sk}^{(n-1)}f_{s,i}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(2)},$$

devant la surface :

$$v_i^{(1)} = \Lambda_{ij}\dot{\sigma}_j^{(1)} + g_{sk}^{(n)}f_{s,i}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(1)}.$$

Soit $f_p = 0$ ($p = v_n$) la surface qui cesse d'être active derrière l'onde. La vitesse de glissement correspondante dans l'hypothèse du mode $v_1 \dots v_n$ est :

$$\dot{\gamma}_p = g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j.$$

Cette expression est positive avant le passage, négative après le passage de l'onde. Nous pouvons donc poser :

$$g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(2)} = -\kappa g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(1)} \quad \kappa > 0,$$

ou

$$g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(2)} = \frac{\kappa}{1+\kappa}g_{pk}^{(n)}f_{k,j}[\dot{\sigma}_j], \quad [\dot{\sigma}_j] = \dot{\sigma}_j^{(2)} - \dot{\sigma}_j^{(1)}.$$

D'après (16) on en déduit alors :

$$(g_{sk}^{(n)} - g_{sk}^{(n-1)})f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(2)} = \frac{\kappa}{1+\kappa}(g_{sk}^{(n)} - g_{sk}^{(n-1)})f_{k,j}[\dot{\sigma}_j].$$

L'introduction du rapport κ permet d'écrire :

$$[v] = \Lambda_{ij}[\dot{\sigma}_j] + \frac{g_{sk}^{(n)} + \kappa g_{sk}^{(n-1)}}{1+\kappa}f_{s,i}f_{k,j}[\dot{\sigma}_j],$$

ou :

$$[v] = M_{ij}[\dot{\sigma}_j],$$

en posant :

$$M_{ij} = \frac{M_{ij}^{(n)} + \kappa M_{ij}^{(n-1)}}{1 + \kappa} \quad \kappa > 0,$$

et l'on est ramené formellement au cas étudié en B. Il résulte de (36) que :

$$M_{ij}^{(n-1)}x_i x_j \leq M_{ij}x_i x_j \leq M_{ij}^{(n)}x_i x_j.$$

Par conséquent la célérité de la surface de discontinuité est comprise dans l'un des trois intervalles entre les célérités de même numéro d'ordre pour le mode $v_1 \dots v_n$ et le mode $v_1 \dots v_{n-1}$.

La direction du vecteur [A] associé à la surface de discontinuité est celle du vecteur propre de la matrice B_{ik} correspondant à la valeur propre $\rho\Omega^2$, sa grandeur étant fixée par le rapport κ . Cette surface de discontinuité, correspondant au blocage du mécanisme v_n , est unique. Une discontinuité pour laquelle la direction du vecteur [A] n'est pas celle du vecteur propre correspondant de B_{ik} se résoud en une discontinuité $n, n-1$, des ondes n, n qui se propagent en avant de la surface $n, n-1$, et des ondes $n-1, n-1$ qui se propagent en arrière de cette surface.

Ces résultats sont la généralisation au cas du potentiel multiple des propriétés des surfaces de décharge dans le cas du potentiel simple [5].

(D) Soit enfin une surface de discontinuité telle qu'un mécanisme de déformation nouveau (p) apparaisse à son passage. On aura :

derrière la surface :

$$v_i^{(2)} = \Lambda_{ij}\dot{\sigma}_j^{(2)} + g_{sk}^{(n)}f_{s,i}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(2)},$$

devant la surface :

$$v_i^{(1)} = \Lambda_{ij}\dot{\sigma}_j^{(1)} + g_{sk}^{(n-1)}f_{s,i}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(1)}.$$

Il faut noter que $\dot{\sigma}_j^{(1)}$ est une dérivée à gauche ($t-0$). L'expression $\dot{\gamma}_p = g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j$ évaluée pour cette dérivée est positive, car elle a le même signe (cf. A3) que $f_{p,i}\dot{\sigma}_i^{(n-1)} - H_{kp}\dot{\gamma}_k^{(n-1)}$, positif d'après (4') pour les dérivées à gauche. La même expression est aussi positive pour $\dot{\sigma}_j^{(2)}$ (dérivée à droite) puisque le mécanisme p est actif derrière la surface. On peut donc poser :

$$g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(1)} = \kappa g_{pk}^{(n)}f_{k,j}\dot{\sigma}_j^{(2)} \quad \text{avec } \kappa > 0.$$

Par les mêmes calculs qu'à la Section (C), en permutant les indices 1 et 2 et changeant κ en $-\kappa$, on en déduit : $[v_i] = M_{ij}[\dot{\sigma}_j]$ avec :

$$M_{ij} = \frac{M_{ij}^{(n)} - \kappa M_{ij}^{(n-1)}}{1 - \kappa} \quad \kappa > 0.$$

Mais cette expression ne fournit pas directement de limitation sévère pour la célérité Ω de la surface de discontinuité. C'est pourquoi, en utilisant la formule (35) pour exprimer

$M_{ij}^{(n)}$, nous écrivons plutôt :

$$[v_i] = M_{ij}^{(n-1)}[\dot{\sigma}_j] + \frac{\varphi_i \varphi_j}{(1-\kappa)g_{pp}^{(n)}}[\dot{\sigma}_j]$$

ce qui revient à remplacer dans (37) $g_{pp}^{(n)}$ par $(1-\kappa)g_{pp}^{(n)}$. On en déduit que la matrice B_{ik} est ici :

$$B'_{ik} = B_{ik}^{(n-1)} - r' a_i a_k$$

avec, d'après (43) :

$$\frac{1}{r'} = (1-\kappa)g_{pp}^{(n)} + \mu_{mn,\sigma\tau}^{(n-1)} \varphi_{mn} \varphi_{\sigma\tau},$$

κ étant positif, r' est extérieur à l'intervalle 0, r ($r' > r$ ou $r' < 0$).

Soit $F'(S) \equiv |B'_{ik} - S\delta_{ik}| = 0$ l'équation en S de B' . Elle est donnée par (44) où r est remplacé par r' . D'autre part :

$$rF'(S) - r'F(S) = (r-r')(A_1 - S)(A_2 - S)(A_3 - S). \quad (45)$$

Les racines de $F(S)$ sont B_1, B_2, B_3 qui correspondent aux ondes n, n . Il résulte de (44) que $F'(A_1), F'(A_2), F'(A_3)$ ont respectivement les signes de $-r', +r', -r'$ et de (45) que $F'(B_1), F'(B_2), F'(B_3)$ ont respectivement les signes de $r-r', -(r-r')$ et $r-r'$. On en déduit que les valeurs propres de la matrice B' sont extérieures aux intervalles B_3A_3, B_2A_2 et B_1A_1 (la plus grande étant supérieure à A_1 si $r' < 0$, la plus petite inférieure à B_3 si $r' > r$). Par conséquent :

La célérité de la surface de discontinuité est extérieure aux intervalles compris entre les célérités de même numéro d'ordre pour le mode $v_1 \dots v_n$ et le mode $v_1 \dots v_{n-1}$.

Une discontinuité pour laquelle la direction du vecteur $[A]$ n'est pas celle du vecteur propre correspondant se résout en une discontinuité $n-1, n$, des ondes $n-1, n-1$ qui se propagent en avant de la surface et des ondes n, n qui se propagent en arrière.

On a choisi ci-dessus comme donnée le rapport κ , ce qui a l'inconvénient de laisser une indétermination entre trois valeurs possibles de la célérité Ω . En fait cette célérité est déterminée d'une manière unique [2] par des données plus complètes relatives à la région (1) (en avant de la surface). Elle doit être telle que f_p reste nul $\forall t$ sur la surface de discontinuité dans la région (1), soit, $\partial f_p / \partial n$ désignant la dérivée normale à cette surface :

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f_p}{\partial n} = 0^\dagger$$

f_p dépendant des contraintes σ_i des glissements γ_k et éventuellement des coordonnées de l'élément de matière, cette équation s'écrit :

$$f_{p,i} \dot{\sigma}_i^{(1)} - H_{pk} \dot{\gamma}_k^{(1)} + \Omega \left(f_{p,i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} - H_{pk} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_j} + \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \right) \alpha_j = 0$$

d'où Ω si l'on suppose les grandeurs $\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \gamma_k, \dot{\gamma}_k$ données dans la région (1).

Une équation analogue pouvait être écrite dans le cas examiné en (C), en introduisant les données $\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \gamma_k, \dot{\gamma}_k$ relatives à la région (2).

† Dans la région (2) cette équation est identiquement satisfaite, donc elle ne donne pas de condition pour Ω , car f_p étant nul $\forall t$ et x_i dans cette région, on a $\partial f_p / \partial t = 0$ et $\partial f_p / \partial n = 0$.

9. CONCLUSION

On a généralisé la théorie classique de l'écoulement plastique en imaginant plusieurs mécanismes d'écoulement non indépendants entre eux. Cette conception réunit dans un même cadre : l'écrouissage et la plasticité parfaite, la théorie de Koiter des mécanismes multiples indépendants, les relations proposées par Hodge pour l'écrouissage isotrope dans le cas de plusieurs mécanismes, la règle d'écrouissage de Taylor.

Moyennant deux hypothèses complémentaires, on a démontré l'existence et l'unicité du mode de déformation pour une vitesse de contrainte donnée. Les mêmes hypothèses, jointes à celle du potentiel plastique, ont permis de retrouver tous les théorèmes classiques de la Plasticité (notamment théorème de Melan, principes de minimum, condition suffisante de stabilité) ainsi que les propriétés des ondes et surfaces de discontinuité précédemment établies dans le cas du potentiel plastique simple.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. BUDIANSKY et T. T. WU, *Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals. Proceedings of the fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics* (1962).
- [2] W. A. GREEN, *Int. J. Engng Sci.* **1**, 523 (1963).
- [3] P. G. HODGE et J. N. GOODIER, *Elasticity and Plasticity*, p. 72. J. Wiley and Sons, New York (1958).
- [4] W. T. KOITER, *Progress in Solid Mechanics* Vol. I, pp. 165–221. North-Holland, Amsterdam (1960).
- [5] J. MANDEL, *J. Mécanique* **1**, (1962); *Séminaire de Plasticité*. Pub. Sc. Tech. Min. Air Paris (1962).
- [6] J. MANDEL, *Conditions de Stabilité et Postulat de Drucker Symposium de Rhéologie et Mécanique des Sols*. Springer, Grenoble (1964).
- [7] J. L. SANDERS, Plastic stress-strain relations based on linear loading functions. *Proceedings of the 2nd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.* p. 455 (1954).
- [8] G. I. TAYLOR, *J. Inst. Metals* **62**, 307 (1938).

(Received 6 October 1964)

Abstract—A medium is considered in which plastic deformation is induced simultaneously by several mechanisms. Such a scheme has already been proposed by different authors, notably Koiter, but assuming only independent mechanisms.

The generalization considered here is concerned with the case of non-independent mechanisms. First the flow relations are established and their form discussed. It is shown next, with the aid of two complementary hypotheses, that these more general relations retain the same properties as those of Koiter. In conclusion, it is shown that these two hypotheses permit the finding of all the classical theorems of the theory of the plastic potential, as well as the properties of waves and surfaces of discontinuity established before for the case of a simple plastic potential.

Абстракт—Рассматривается среда, в которой пластическая деформация производится одновременно несколькими механизмами. Такая схема была раньше предложена разными авторами, особенно Коитером, но с предположением независимых механизмов. Обобщение, предложенное здесь, имеет дело со случаем не-независимых механизмов. В начале устанавливаются отношения потоков и дискутируется их форма. Дальше указано с помощью двух дополнительных предположений, что эти более общие отношения сохраняют те же свойства, что и отношения Коитера. В заключение показано, что эти два предположения позволяют вывести все классические теоремы в теории пластического потенциала, также как свойства волн и поверхностей разрывности, установленные прежде для случая простого пластического потенциала.